数理解析研究所講究録
第 1787 巻 2012 年 18-28

数書九章

大阪大学名誉教授　竹之内　脩 (Takenouchi Osamu)
Osaka University, Professor Emeritus

数書九章 (1247) は、秦九韶 (1208〜1267) の著作である。

秦九韶は、南宋時代、四川省安岳の生まれ、現在同地には、記念館が造られている。

南宋は、当時、金、蒙古からの圧迫を受け、次々に領土を失い、それと共に、秦は、建康 (現在 南京)、臨安 (現在 杭州) へと移り、死す。数書九章は、南京で著されたという。

数書九章は、大衍類、天時類、田域類、測望類、賦役類、錢谷類、営建類、軍旅類、市物類の九つの類から構成されている。各類は、巻第一、巻第二 ; 巻第三、巻第四 ; … の如く、二つずつの巻から成る。数書九章とあるが、九章の構成はない。九章算術を意識していることは確かで、各問 (すべてではないが) の解答を与える術に、九章算術のこの章に準拠するというような書き方がなされているが、内容は、あまり関係がない。

各巻は、まず ◯ 問題名 … 問 といった形で問いを上げ、その後、術、答、草という形でその問に解答を与えている。(そういうきちんとした形になっていない問もある。) 問は、各巻でその数もまちまちであり、全体で 81 ある。通常、それに 1. から 81. までの番号を付している。

本書の内容として、大きく喧伝されているのは、大衍求一術と天元術である。

易経に、大衍の数 50 とあり、この 50 がどのようにして生まれたものかを求めるところから、大衍術がはじまったと考えられる。大衍術は、この書の冒頭の問 [1] 蓍卦(しか)發微に取り上げられている。これは、連立 1 次合同式の開法を論ずるものである。それはまた、暦を研究するもとになったとも考えられる。その手法は、

巻第一　[1] 蓍卦(しか)發微、[2] 古暦会積、[3] 推計土功、[4] 推庫額錢、

巻第二　[5] 分粜(ちょう)推原、　[6] 程行計地、[7] 程行相及、[8] 積尺尋源、[9] 余米推数

においても、論じられている。

しかし、原文の問のままでは、数学的に解のない問 (例えば、[2] 古暦会積) もあり、そのことについては、全く論じられていない。しかし、問の形そのものは、与えられている数値を多少変更することにより、解を得ることができる。

天元術は、代数方程式の解法である。

すでに『九章算術』において、開平法、開立法が扱われ、また帯縦開平としてより一般な 2 次方程式の解法が扱われているが、この書では、連枝開方として一般の方程式が取り上げられている。その方法は、いわゆるホーナーの方法として知られているもので

あるが、この書は 13 世紀、Horner は 18 世紀末であるから、500 年先駆けていると、中国では称揚している。

偶数次の項ばかりからなるものを玲瓏連枝といい、また、分数形のものとして、開同体連枝などというものも扱われている。

また、この書物は、以上のことばかりでなく、当時の社会経済の様子を問題にしており、貨幣紙幣の流通、建築物についての情報、工事のあり方などの興味ある記述が注目されている。

以下に多少の内容の紹介をする。

大衍類

[1] 蓍卦(しか)發微

問 易に曰く、大衍の数 50、その用 49。又曰く、分けて二となし象を以って両、一を掛けて象を以って三、之を楪して (かぞえて) 、以って四、象を以って四時、3 変して爻となし、18 変して卦となす。
所衍の術、及びその数はそれぞれいくらか。

答 衍母 12　　衍法 3
一元衍数 24　　二元衍数 12　　三元衍数 8　　四元衍数 6
以上、四位衍数計 50
一楪用数 12　　二楪用数 24　　三楪用数 4　　四楪用数 9
以上四位用数計 49

〔解説〕 蓍卦というのは、易に用いる道具で、蓍とは算木、長さの異なる 2 種類あり、短いものは長いものの半分の長さのものである。また卦というのはいわゆる筮(ぜい)竹で、竹の細い棒。50 本あり、これから 1 本を引いた 49 本を揉んで二つに分け、その奇数、偶数によって短い算木を二つ、あるいは長いものを一つ置く。これを 6 回繰り返して、図のように並べると、64 通りの並びの一つになる。これを卦(け)といい、そのどれになるかによって運勢が定まるとするのが、易である。

草 1, 2. 3, 4 を置き右行に列す。これらを定母という。天元 1 を立てて左行に列す。

𝍠　𝍠
𝍠　𝍡
𝍠　𝍢
𝍠　𝍣
右行を以って
左行に互乗

右行 1, 2, 3, 4
を以って左行
異子 1 と互乗、
対位、本子
各衍数を得る

𝍪𝍣　上𝍠
𝍩𝍡　副𝍡
𝍧　次𝍢
𝍥　下𝍣
左行を以って
之を併せ
50 を得る

この 50 が、易に、大衍の数 50 といっているものである。

ここで、方法、及びその解釈について、たいへん長い説明があるが、これについては、別に論ずることとする。

以下は、大衍術について述べる。これは、連立 1 次合同式

$$
\begin{aligned}
X &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\
&\equiv a_2 \pmod{m_2} \\
&\cdots\cdots \\
&\equiv a_k \pmod{m_k}
\end{aligned}
$$

の解法である。ここでは、整数が対象である。

［大衍求一術］　まず、A, B 2 数に対し、

$$Ax \equiv 1 \quad (\mathrm{mod})\ B)$$

の解 x を求める。これについては、關孝和が、『括要算法』亨巻で述べているものを、竹之内『關孝和の数学』(共立出版) から引用する。秦も關も、『孫子算経』の、「今、物有り、総数を知らず」の解を出発点にしているが、両者に関連はないようである。

互除法によって、

$$
\begin{aligned}
A &= BQ_1 + R_1 \\
B &= R_1Q_2 + R_2 \\
R_1 &= R_2Q_3 + R_3 \\
\cdots & \quad \cdots \\
R_{k-2} &= R_{k-1}Q_k + R_k, \quad R_k = 1
\end{aligned}
$$

とし、これから

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1 + Q_1Q_2 \\
S_2 &= Q_1 + S_1Q_3 \\
S_3 &= S_1 + S_2Q_4 \\
\cdots & \quad \cdots \\
S_{k-1} &= S_{k-3} + S_{k-2}Q_k
\end{aligned}
$$

とする。このとき、

$$AS_{k-1} \equiv 1 \pmod{B}$$

となるので、

$$x = S_{k-1}$$

ととればよい。

上記の連立 1 次合同式の解

まず、法 $m_1,\ m_2,\ \cdots\ m_k$ を、互いに素な数に化する。

$$m_1 \to m'_1, \quad m_2 \to m'_2, \quad \cdots, \quad m_k \to m'_k$$

そして、$m_1,\ m_2,\ \cdots\ m_k$ の最小公倍数を $M = m'_1 m'_2 \cdots m'_k$ として、

$$M_1 = M/m'_1,\ M_2 = M/m'_2,\ \cdots, M_k = M/m'_k$$

に対して、

$$M_1x_1 \equiv 1 \pmod{m'_1},\quad M_2x_2 \equiv 1 \pmod{m'_2},\quad \cdots\quad ,\quad M_kx_k \equiv 1 \pmod{m'_k}$$

となる $x_1,\ x_2,\ \cdots,x_k$ を求め、

$$X_0 = a_1M_1x_1 + a_2M_2x_2 + \cdots + a_kM_kx_k$$

とすれば、この X_0 から M の倍数を引いていって M より小な数 X としたとき、この X が求める連立 1 次合同式の解となる。

[2] 古歴会積

問

冬至の時点から、次の冬至の時点までは、365 $\frac{1}{4}$ 日である。

また、朔 (月齢 0) から、次の朔までは、29 $\frac{499}{940}$ 日である。

甲子の日から、次の甲子の日までは、60 日である。

いま、淳祐丙午の歳 (淳祐 6 年、1246 年) 11 月、朔は丙辰、初 5 日庚申が冬至、そして初 9 日が甲子である。

古暦で、気 (冬至の日)、朔、甲子が一に会するのは、何年、何月、何日の後であるか。また、上元 (この歳より前で、この歳に一番近い気、朔、甲子が一に会した歳) からこの歳まで、何年経っているか。及び次の気までは、何年か。

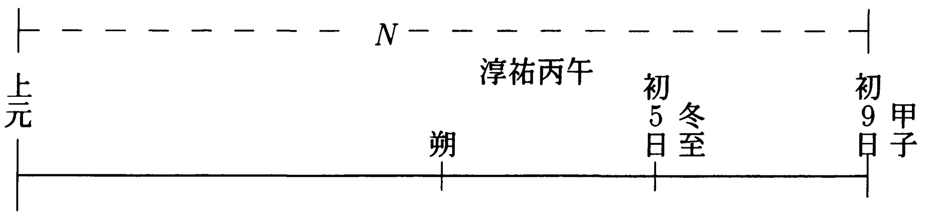
〔解説〕 冬至から冬至まで 365 $\frac{1}{4}$ 日 $=$ $\frac{1461}{4}$ 日ということは、1461 日経つと太陽が地球の周りを完全に 4 周する (気) ということである。
また、朔から朔まで 29 $\frac{499}{940} = \frac{27,759}{940}$ 日ということは、27,759 年経てば、月が地球の周りを 940 周するということである。

したがって、1461 と 27,759 と 60 の最小公倍数 555,180 だけの日数が経てば、暦は完全に繰り返される、ということである。これが、1 会積日といっているものである。
また、これを $\frac{27,759}{940}$ で割れば、月数が出てくる。それが、18,800 月。それが、1 会積月。
同様に、$\frac{1461}{4}$ で割れば、年数が出てくる。それが、1520 年。1 会積年である。

ただし、原著の答はこのようになっていない。これについては、古くから、誤りであることが指摘されている。例えば、沈欽裴 (1790〜1870)「古暦会積」。

歳で、このときから暦が、甲子、乙丑、丙寅、… と数えられ始められた、とするものである。そのうち、直近のものを上元として、それからこの歳、淳祐丙午までの年数、及び次の暦元の歳までの年数を問うている。

いま、　上元からこの歳の初 9 日、甲子の日までの日数を N とする。N は 60 の倍数である。



$9-5=4$ であるから、初 5 日と初 9 日の間を a 日とすれば、時刻を込めて考えれば、$3<a<5$。そして、$N-a$ は、$365\frac{1}{4}=\frac{1461}{4}$ で整除されなければならない。
$9-1=8$ であるから、朔と初 9 日の間を b 日とすれば、時刻を込めて考えれば、$7<b<9$。そして、$N-b$ は、$29\frac{499}{940}=\frac{27,759}{940}$ で整除されなければならない。
したがって、一応 $a=4.\ \ b=8$ とすれば、次の連立 1 次合同式がみたされなければならない。

$$\begin{aligned} N &\equiv 4 \pmod{365\frac{1}{4}} \\ &\equiv 8 \pmod{29\frac{499}{940}} \\ &\equiv 0 \pmod{60} \end{aligned}$$

4 と 940 の最小公倍数 940 を掛けると、

$$\begin{aligned} 940\,N &\equiv 3,760 \pmod{343,335} \\ &\equiv 7,520 \pmod{27,759} \\ &\equiv 0 \pmod{60} \end{aligned}$$

$343,335=3\cdot5\cdot47\cdot487,\quad 27,759=3\cdot19\cdot487$　であるから、343,335 と 27,759 の最大公約数は、$3\cdot487=1,461$　しかし、右辺の 3,760 と 7,250 の差 3,760 は 1461 では整除されないので、この連立 1 次合同式には解がない。同様に、3,760 と 0 の差の部分も、343,335 と 56,400 の最大公約数 705 で整除されなければならない。7,520 と 0 の差の部分も、27,759 と 56,400 の最大公約数 3 で整除されなければならない。
そこで、いま、この連立一次合同式を、$P=940\,a,\quad Q=940\,b$　とし、

$$\begin{aligned} X &\equiv P \pmod{343,335} \\ &\equiv Q \pmod{27,759} \\ &\equiv 0 \pmod{56,400} \end{aligned}$$

を考える。そして、$Q-P=1,461\,U,\quad P=705\,V,\quad Q=3\,W$　とすると、

$$3\,W-705\,V=1,461\,U \qquad \text{すなわち、} \qquad W-235\,V=487\,U$$

さらにまた、$3 \leqq a \leqq 5$, したがって $3 \times 940 \leqq P \leqq 5 \times 9 \times 940$、すなわち $2,820 \leqq P \leqq 4,700$。また、同じく $7 \leqq b \leqq 9$ から、$6,580 \leqq Q \leqq 8,460$。
これらを満たす整数解を求めると、次の三つが得られる。

(1) $U = 3,\ V = 4,\ W = 2,401;\ \ P = 2,820,\ Q = 7,203;\ \ a = 3,\ b = 7.66$
(2) $U = 3,\ V = 5,\ W = 2,636;\ \ P = 3,525,\ Q = 7,708;\ \ a = 3.75,\ b = 8.41$
(3) $U = 2,\ V = 6,\ W = 2,384;\ \ P = 4,230,\ Q = 7,152;\ \ a = 4.5,\ b = 7.61$

そこで、この三つの組み合わせに対して、連立 1 次合同式の解を求める。

これらの合同式の法の 343,335, 27,759, 56,400 に対して、互いに素となるように化して、

$$343,335 = 3 \times 5 \times 47 \times 487 \ \rightarrow\ 487$$
$$27,759 = 3 \times 19 \times 487 \ \rightarrow\ 19$$
$$56,400 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 47 \ \rightarrow\ 56,400$$

とする。

そして、

$$19 \times 56,400 \times 431 \equiv 1 \pmod{487}, \quad 487 \times 56,400 \times 1 \equiv 1 \pmod{19}$$

ここで、

$$19 \times 56,400 \times 431 = 461,859,600, \quad 487 \times 56,400 \times 1 = 27,466,800$$

であるから、上の連立 1 次合同式の解は、$461,859,600 \times P + 27,466,800 \times Q$ として、

(1) $2,820 \times 461,859,600 + 7,203 \times 27,466,800 = 1,500,287,432,400$
(2) $3,525 \times 461,859,600 + 7,708 \times 27,466,800 = 18,397,691,844$
(3) $4,230 \times 461,859,600 + 7,152 \times 27,466,800 = 21,501,086,616$

これから、343,335, 27,759, 60 の最小公倍数 $2^4 \times 3 \times 5^2 \times 19 \times 47 \times 487 = 521,869,200$ で割った余りとして、

(1) $435,351,600$, (2) $180,254,400$, (3) $7,557,600$

が得られる。これが、$940N$ の値であるから、

(1) $N = 463,140$, (2) $N = 191,760$, (3) $N = 8,040$

N は日数であるから、月にすると、

(1) $(N - 7.66) \div 29\dfrac{499}{940} = 15,683$
(2) $(N - 8.41) \div 29\dfrac{499}{940} = 6,493$
(3) $(N - 7.61) \div 29\dfrac{499}{940} = 17.5$

また、年にすると、

(1) $(N-3) \div 365\frac{1}{4} = 1,268$

(2) $(N-3.75) \div 365\frac{1}{4} = 525$

(3) $(N-4.5) \div 365\frac{1}{4} = 22$

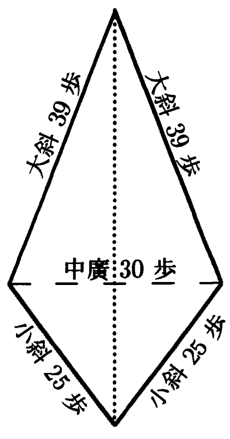
答 1 会積日 ＝ 555,180 日
1 会積月 ＝ 18,800 月
1 会積年 ＝ 1,520 年

また、上元からの暦過年数、および次の気までの年数については、3 通りの答が考えられる。

(1) 暦過年数 ＝ 1,268 年、 次の気までの年数 ＝ 252 年
(2) 暦過年数 ＝ 525 年、 次の気までの年数 ＝ 995 年
(3) 暦過年数 ＝ 22 年、 次の気までの年数 ＝ 1,498 年

[19] 尖田究積

両方に尖った田が 1 段ある。尖った長さは等しくない。大きい方の斜めの長さは 39 歩で、小さい方の斜めの長さは 25 歩である。中央の廣さは、 30 歩。
その面積はいくらか。



答　田の積 840 歩

術　少廣を以って之を求め、翻法に之を入れる。
半廣を置いて自乗して、半冪となす。少斜冪と相減相乗して、少率となす。半冪と大斜を相減相乗して、大率となす。二率を相減し、餘りを自乗して實となす。二率を併せ、これを倍して、従上廉となす。一を益実とする。

注　図から容易に、上の尖りから中廣までの距離 36 歩、下の尖りから中廣までの距離 20 歩が知られる。したがって、

$$\frac{1}{2}(30+20)\cdot 30 = 840$$

として、田の積 840 歩が得られる。

【秦九韶の解】

大斜を a、小斜を b、中廣を c とする。
大斜と中廣で囲まれた部分の面積を A_1、小斜と中廣で囲まれた部分の面積を A_2 とすれば、

$$A_1 = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}, \qquad A_2 = \frac{c}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

また、求める田の積を x とすれば、

$$x = A_1 + A_2 = \frac{c}{2}\left(\sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\right)$$

両端を自乗すれば、

$$x = \left(\frac{c}{2}\right)^2\left[a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\right]$$

移項して、

$$x^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\left\{a^2 + b^2 - 2\left(\frac{c}{2}\right)^2\right\} = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2\sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

両辺を自乗して、簡略化する。

$$-x^4 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2\left\{a^2 + b^2 - 2\left(\frac{c}{2}\right)^2\right\}x^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^4(a^2 - b^2)^2 = 0$$

これが、開方式である。

$a = 39,\ b = 25,\ c = 30$ を代入すれば、

$$-x^4 + 763,200\,x^2 - 40,642,560,000 = 0$$

となる。

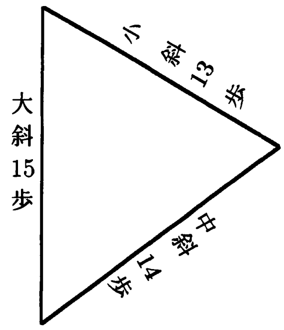
天元術　上の式を得て、「開飜法三乗方」といって、答を与える。

他のところでは、
　開平方、開立方、開三乗方、……、開九乗方
　連枝
　玲瓏
　開同体連枝
など、使われている。

[20]　三斜求積

ここでは、面積を求めるのにヘロンの公式が使われている。

沙田が1段ある。3斜は、小斜13里、中斜14里、大斜　15里である。里法300歩。田の積は幾何か。



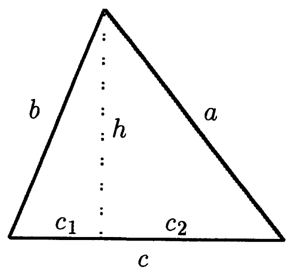
答　田積315頃

術　少廣を以って之を求める。
小斜冪を大斜冪と併せて中斜冪を減じ、餘りを2で割り、自乗して上に。
小斜冪と大斜冪を乗じ、上を減じて、餘りを4で割り、實とする。
1を従隅として開平方すれば、積を得る。

ヘロンの公式

上記の解では、三角形の辺から面積を求めるヘロンの公式が、何の説明もなく用いられている。

【解説】 この章の中では、ヘロンの公式が、次の形で用いられている。



$$A^2 - \frac{a^2c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2}{4} = 0$$

これは、次のようにして導かれたものであろうか。

$$c_2^2 = a^2 - h^2$$
$$c_1^2 = (c - c_2)^2 = b^2 - h^2$$

これより、

$$c^2 - 2\,c_2 c = b^2 - a^2$$

ゆえに、

$$c_2 = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,c}$$

また、

$$h^2 = a^2 - c_2^2 = \frac{a^2c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2}{c^2}$$

$A = \frac{c}{2}\cdot h$　したがって　$A^2 - \frac{c^2}{4}\cdot h^2 = 0$ であるから、

$$A^2 - \frac{a^2c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2}{4} = 0$$

[25] 漂田求積

問 三斜田が水をかぶって、一隅がもっていかれ、四不等直田の形になった。

元の中斜 16 歩 は長い辺。水際に沿った 5 歩 (水直) は小闊。残りの小斜 13 歩は弦。残りの大斜 20 歩は元の中斜の弦。横に測った徑 12 歩は残りの田の広である。また、元の中斜の句、亦是水に浸った部分の股である。

元の積、残りの積、水の積、元の大斜、元の中斜、2 水斜は、それぞれいくらか。

答 元の積 $138\frac{8}{11}$ 歩

水の積 $12\frac{8}{11}$ 歩

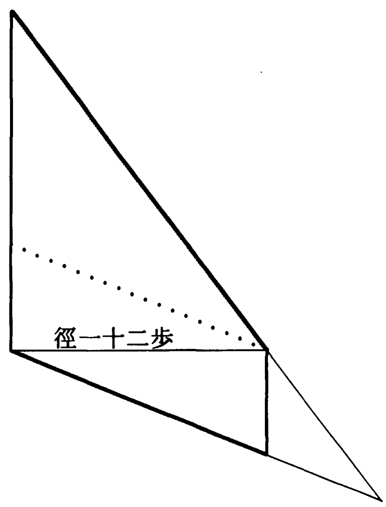
残りの積 126 歩

元の大斜 $29\frac{1}{11}$ 歩

元の小斜 $18\frac{1}{11}$ 歩

水大斜 $9\frac{1}{11}$ 歩

水小斜 $5\frac{1}{11}$ 歩



[26] 環田三積

問 環田と大小円田、合計三つの田がある。

環田は外周 30 歩、虚徑 8 歩

大円田は徑 10 歩

小円田は周 30 歩

3 田の積、及び環の内周、通徑、大円の周、小円の徑は、それぞれいくらか。

ここでは、円率として、$\sqrt{10}$ が使われている。